第 44 講　総合問題(12)

1　k を正の整数とする．$5n^2-2kn+1<0$　を満たす整数 n がちょうど１個であるような k をすべて求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　xy 平面の原点を O とする．xy 平面上の O と異なる点 P に対し，直線 OP 上の点 Q を，次の条件(a)，(b)を満たすようにとる．

(a)　$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=4$　　　(b)　Q は，O に関して P と同じ側にある．

このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 P が直線 $x=1$ の上を動くとき，点 Q の軌跡を求めて，図示せよ．

(2)　$a>r>0$ とする．点 P が円 $(x-a)^2+y^2=r^2$ の上を動くとき，点 Q の軌跡が円であることを示し，その中心の座標と半径を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　実数 a，b，c に対して，3 次関数　$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$　を考える．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ が整数であるならば，すべての整数 n に対して，$f(n)$ は整数であることを示せ．

(2)　$f(2010)$，$f(2011)$，$f(2012)$ が整数であるならば，すべての整数 n に対して，$f(n)$ は整数であることを示せ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 44 講　総合問題(12)

正の整数 n，k に対し，n を k 個の整数の和で表す方法の総数を $p(n,\ k)$ で表す．ここで順番が異なっているだけのものは同じとみなす．また，$n<k$ のときは　$p(n,\ k)=0$ とする．たとえば 5 を 3 個の正の整数の和で表す方法は $5=1+1+3=1+2+2$　の 2 通りである．したがって　$p(5,\ 3)=2$　となる．

(1)　n が偶数のとき　$p(n,\ 2)=\dfrac{n}{\boxed{\text{ア}}}$　　　n が奇数のとき　$p(n,\ 2)=\dfrac{n-\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$

である．

(2)　$n>3$ のとき，$n=a+b+c$（$a\leqq b\leqq c$，a，b，c は整数）と表すと，

$$p(n,\ 3)=p(n-1,\ 2)+p(n-3,\ 3)$$

が成り立つ．このことを利用すると，$p(6,\ 3)=\boxed{\text{エ}}$ である．

また，$n\geqq 2$ のとき　$p(6n,\ 3)=\boxed{\text{オ}}n-\boxed{\text{カ}}+p(6(n-1),\ 3)$　であることより，$p(6n,\ 3)$ を n の式で表すと　$p(6n,\ 3)=\boxed{\text{キ}}n^{\boxed{\text{ク}}}$　である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第44講　総合問題⑿

1　k を正の整数とする．$5n^2-2kn+1<0$ を満たす整数 n がちょうど１個であるような k をすべて求めよ．

$f(x)=5x^2-2kx+1$ とおくと，

グラフの軸　$x=\dfrac{k}{5}>0$　　$f(0)=1>0$　よって　$x\leqq 0$ のとき　$f(x)$ は常に正．

よって　$f(n)<0$ を満たす整数 n は正である．

$f(1)\geqq 0$ とすると，$6-2k\geqq 0$　　$k\leqq 3$　これを満たす自然数 k は　$k=1,\ 2,\ 3$　のみ

このとき　$\dfrac{1}{5}\leqq(軸)\leqq\dfrac{3}{5}$　　つまり　$0<(軸)<1$　より

$x\geqq 1$ のとき　$f(x)$ は常に正となり，$f(n)<0$ となる整数 n は存在しない．

よって題意を満たす整数 n がただ１つ存在するのは

　$f(1)<0$　かつ　$f(2)\geqq 0$　のとき

つまり　$6-2k<0$　かつ　$21-4k\geqq 0$　　$3<k\leqq\dfrac{21}{4}$　　したがって $\boldsymbol{k=4,\ 5}$

2　xy 平面の原点を O とする．xy 平面上の O と異なる点 P に対し，直線 OP 上の点 Q を，次の条件(a)，(b)を満たすようにとる．

(a)　OP・OQ＝4　　(b)　Q は，O に関して P と同じ側にある．

このとき，次の問いに答えよ．

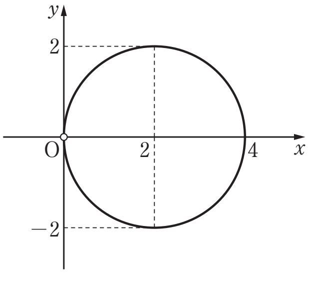
(1)　点 P が直線 $x=1$ の上を動くとき，点 Q の軌跡を求めて，図示せよ．

(2)　$a>r>0$ とする．点 P が円 $(x-a)^2+y^2=r^2$ の上を動くとき，点 Q の軌跡が円であることを示し，その中心の座標と半径を求めよ．

OP＝p，OQ＝q とすると，$pq=4$　つまり　$p=\dfrac{4}{q}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{p}{q}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{4}{q^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　　よって　P$(s,\ t)$，Q$(X,\ Y)$ とすると，$(s,\ t)=\dfrac{4}{X^2+Y^2}(X,\ Y)$

つまり　$s=\dfrac{4X}{X^2+Y^2}$，$t=\dfrac{4Y}{X^2+Y^2}$



(1)　点 P が $x=1$ 上にあるとき　$\dfrac{4X}{X^2+Y^2}=1$

　$X^2+Y^2=4X$　かつ　$X^2+Y^2\neq 0$

　$(X-2)^2+Y^2=4$　かつ　$(X,\ Y)\neq(0,\ 0)$

　よって　点 Q の軌跡は　**中心 (2, 0)　半径 2 の円　（ただし (0, 0) を除く）**

(2)　$(s-a)^2+t^2=r^2$　より　$\left(\dfrac{4X}{X^2+Y^2}-a\right)^2+\left(\dfrac{4Y}{X^2+Y^2}\right)^2=r^2$

$$\frac{16X^2}{(X^2+Y^2)^2}-2a\cdot\frac{4X}{X^2+Y^2}+a^2+\frac{16Y^2}{(X^2+Y^2)^2}=r^2$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\frac{16}{X^2+Y^2}-\frac{8aX}{X^2+Y^2}+a^2-r^2=0$$

$(a^2-r^2)(X^2+Y^2)-8aX+16=0$　かつ　$X^2+Y^2\neq 0$

$a>r>0$　より　$a^2-r^2>0$　よって

$X^2+Y^2-\dfrac{8aX}{a^2-r^2}+\dfrac{16}{a^2-r^2}=0$　かつ　$(X,\ Y)\neq(0,\ 0)$　（これは満たされる）

$$\left(X-\frac{4a}{a^2-r^2}\right)^2+Y^2=\frac{16r^2}{(a^2-r^2)^2}$$

よって　**点 Q の軌跡は　中心 $\left(\dfrac{4a}{a^2-r^2},\ 0\right)$　半径　$\dfrac{4r}{a^2-r^2}$　の円**

3　実数 a，b，c に対して，3 次関数　$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$　を考える．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ が整数であるならば，すべての整数 n に対して，$f(n)$ は整数であることを示せ．

(2)　$f(2010)$，$f(2011)$，$f(2012)$ が整数であるならば，すべての整数 n に対して，$f(n)$ は整数であることを示せ．

(1)　$f(-1)=a-b+c-1=p$　……①　　$f(0)=c=q$　……②

$f(1)=a+b+c+1=r$　……③　　（p，q，r は整数）　とおく．

①，②より　$a-b=p-q+1$　　②，③より　$a+b=r-q-1$

これらより　$a=\dfrac{r+p-2q}{2}$，$b=\dfrac{r-p-2}{2}$

このとき　$f(x)=x^3+\dfrac{r+p-2q}{2}x^2+\dfrac{r-p-2}{2}x+q$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\right)p+(-x^2+1)q+\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)r+x^3-x$$

$$=\frac{1}{2}x(x-1)p+(-x^2+1)q+\frac{1}{2}x(x+1)r+(x-1)x(x+1)$$

x が整数のとき　$x(x-1)$，$x(x+1)$ は連続 2 整数の積より偶数である．

したがって，すべての整数 n で　$f(n)$ は整数となる．

(2)　$g(x)=f(x+2011)$

$=(x+2011)^3+a(x+2011)^2+b(x+2011)+c$

$=x^3+Ax^2+Bx+C$　　（A，B，C は実数）　とおく．

このとき　$f(2010)=g(-1)$　　$f(2011)=g(0)$　　$f(2012)=g(1)$　が整数のとき

(1)と同様にして，すべての整数 k に対して

$g(k)=f(k+2011)$ は整数である．

$k+2011=n$　とおくと n も整数より　すべての整数 n で $f(n)$ は整数である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第44講　総合問題⑿

正の整数 n, k に対し，n を k 個の整数の和で表す方法の総数を $p(n,\ k)$ で表す．ここで順番が異なっているだけのものは同じとみなす．また，$n<k$ のときは　$p(n,\ k)=0$ とする．たとえば5を3個の正の整数の和で表す方法は $5=1+1+3=1+2+2$　の2通りである．したがって　$p(5,\ 3)=2$　となる．

(1)　n が偶数のとき　$p(n,\ 2)=\dfrac{n}{\boxed{\text{ア}}}$　　n が奇数のとき　$p(n,\ 2)=\dfrac{n-\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$

である．

(2)　$n>3$ のとき，$n=a+b+c$（$a\leqq b\leqq c$，a，b，c は整数）と表すと，

$$p(n,\ 3)=p(n-1,\ 2)+p(n-3,\ 3)$$

が成り立つ．このことを利用すると，$p(6,\ 3)=\boxed{\text{エ}}$ である．

また，$n\geqq 2$ のとき　$p(6n,\ 3)=\boxed{\text{オ}}\,n-\boxed{\text{カ}}+p(6(n-1),\ 3)$　であることより，$p(6n,\ 3)$ を n の式で表すと　$p(6n,\ 3)=\boxed{\text{キ}}\,n^{\boxed{\text{ク}}}$　である．

(1)　n が偶数のとき，n を2個の正の整数の和で表す方法は

$$1+(n-1),\ 2+(n-2)+,\ \cdots\cdots,\ \frac{n}{2}+\frac{n}{2}\quad の\quad \frac{n}{2}\ 通り$$

n が奇数のとき，n を2個の正の整数の和で表す方法は

$$1+(n-1),\ 2+(n-2)+,\ \cdots\cdots,\ \frac{n-1}{2}+\frac{n+1}{2}\quad の\quad \frac{n-1}{2}\ 通り$$

よって　n が偶数のとき　$p(n,\ 2)=\dfrac{n}{\mathbf{2}}$　　n が奇数のとき　$p(n,\ 2)=\dfrac{n-\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

(2)　$n=1$ のとき　$p(6n,\ 3)=p(6,\ 3)=p(5,\ 2)+p(3,\ 3)$

ここで　(1)より　$p(5,\ 2)=2$

また，$p(3,\ 3)$ は3を3個の正の整数で表す方法で，$1+1+1$ の1通り

よって　$p(6,\ 3)=2+1=\mathbf{3}$

$n\geqq 2$ のとき　$p(6n,\ 3)=p(6n-1,\ 2)+p(6n-3,\ 3)$

$$=\frac{(6n-1)-1}{2}+p(6n-4,\ 2)+p(6n-6,\ 3)$$

$$=3n-1+\frac{6n-4}{2}+p(6(n-1),\ 3)$$

$$=\mathbf{6}n-\mathbf{3}+p(6(n-1),\ 3)$$

$p(6n,\ 3)=a_n$　とおくと　$a_1=3$，$a_n=a_{n-1}+6n-3$

よって，$n\geqq 2$　のとき　$a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(a_k-a_{k-1})=3+\sum_{k=2}^{n}(6k-3)=\sum_{k=1}^{n}(6k-3)$

$$=3n(n+1)-3n=3n^2\quad（n=1\ のときも成立）$$

したがって　$p(6n,\ 3)=\mathbf{3}n^{\mathbf{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。